

Αρα το επίπεδο είναι:

$$(x-2) \cdot 1 + (y-1) \cdot (-2) + (z-1) \cdot (3) = 0$$

2ος τρόπος: Τα διανύσματα $\vec{a}^p, \vec{b}^p$ είναι εφαπτόμενα στο επίπεδο που ζητάμε

Αρα:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x-2) - 2(y-1) + 3(z+1) = 0$$

31/5/18

Φυλλάδιο 5

- Π.8] Δίνεται το επίπεδο με εξίσωση $2x+y+z=1$
- (i) Να βρεθεί ο θετικός και ο αρνητικός ημίχωρος
 - (ii) Να βρεθεί μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο Π
 - (iii) Να βρεθεί η απόσταση του $O(0,0,0)$ από το Π .

Λύση: (i) Ο θετικός ημίχωρος αποτελείται από τις τιμές (x, y, z) έτσι ώστε $2x+y+z > 0$
Ο αρνητικός ημίχωρος αποτελείται από

$$\vec{p} = (2, 1, 1) \quad \text{Ένα μοναδιαίο είναι το}$$

$$\vec{e}^p = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} = \frac{(2, 1, 1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} \Rightarrow \vec{e}^p = \frac{1}{\sqrt{6}} (2, 1, 1)$$



(εii) Η απόσταση ενός σημείου $P(x_0, y_0, z_0)$ από το (Π) δίνεται από τον τύπο:

$$d(P, \Pi) = \frac{|2x_0 + y_0 + z_0 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{d(O, \Pi) = \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

11.10 Δίνεται το επίπεδο $(\Pi): x - 2y + z = 0$. Βρείτε ένα μοναδιαίο και κάθετο διάνυσμα στο (Π) . Να βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις του (Π) . Σε ποιον κύβωβο βρίσκεται το σημείο $P(1, -1, 1)$;

Λύση: i) Ένα κάθετο διάνυσμα στο (Π) είναι το $\vec{u} = (1, -2, 1)$. Έσυνως ένα μοναδιαίο και κάθετο είναι το $\vec{e}^p = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(1, -2, 1)}{\sqrt{6}}$

(ii) Για $x=y=0 \Rightarrow z=0$
 $\boxed{A(0, 0, 0)}$

Για $x=y=1 \Rightarrow z=1$
 $\boxed{B(1, 1, 1)}$

Για $x=1, y=2, z=3$
 $\Gamma(1,2,3)$

Συνεπώς τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{AP} = (1,1,1)$
 $\vec{b} = \vec{AP} = (1,2,3)$ είναι μη-συγκολλητικά
 και εγγεγμένα στο π .

Αρα η διανυσματική εξίσωση:

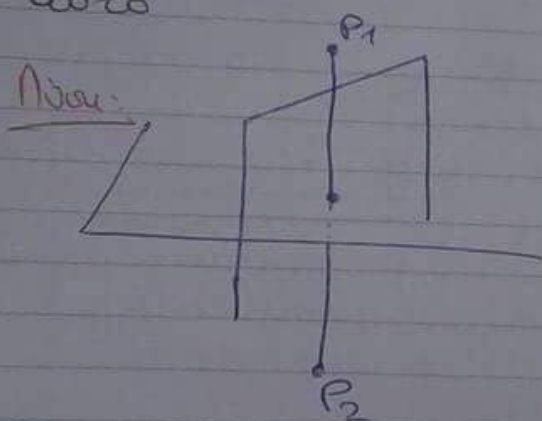
$$\vec{x} = 0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \lambda(1,1,1) + \mu(1,2,3)$$

~ο
$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = \lambda + 3\mu \end{cases}$$

(iii) υπολογίζουμε: $1 - 2(-1) + 1 = 4 > 0$

Αρα το P βρίσκεται στο δεύτερο ημίσωρο.

1.11 Δείξτε ότι τα σημεία $P_1(1, -4, -2)$ και $P_2(-1, 3, 3)$ βρίσκονται εσωτερωδώς του επιπέδου $(\pi): 7x - 3y + 4z = 5$ και ισαπέχουν από αυτό



As υπολογίζουμε σε ποιον ημίσωρο ανήκει το P_1 και το P_2 .

Για το P_1 :

$$7 \cdot (1) - 3(-4) + 4 \cdot (-2) - 5 = 7 + 12 - 8 - 5 = 6 > 0$$

Για το P_2 :

$$7 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 + 4 \cdot (3) - 5 = -7 - 6 + 12 - 5 = -6 < 0$$

⊕

$$\text{Τώρα: } d(P_1, \pi) = \frac{|6|}{\sqrt{7^2+3^2+4^2}}$$

$$d(P_2, \pi) = \frac{|-6|}{\sqrt{7^2+3^2+4^2}}$$

$$\text{Άρα } d(P_1, \pi) = d(P_2, \pi)$$

11.12 Ένα επίπεδο έχει συνετακμένες επί των αξόνων a, b, γ . Αν η αρχή των αξόνων έχει απόσταση d από το π , να δ.ο.:

$$\boxed{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{d^2}}$$

Πύα: Η γενική εξίσωση του επιπέδου είναι $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$.

Τα a, b, γ είναι τα "ακμεία" που το επίπεδο τέμνει τους άξονες. Άρα το επίπεδο έχει εξίσωση

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{\gamma} = 1}$$

$$\text{Τώρα: } d^2 = d(0, \pi)^2 = \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{\gamma^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{\gamma^2}}$$

Φυλλάδιο 6

1.3 Να βρεθούν οι διαμέσες εξισώσεις της ευθείας που:

(α) διέρχεται από το $A(1, 0, -2)$ και είναι παράλληλη προς το $\vec{a}^b = (2, 3, -5)$

(β) διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3, 3)$ και $B(-3, 7, 4)$

Ποι: (α) Η διαμεσική εξίσωση είναι:

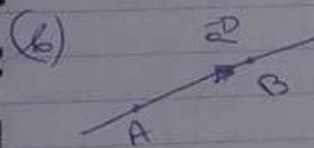
$$\vec{x} = (1, 0, -2) + t(2, 3, -5)$$

(β) παραμετρικές εξισώσεις είναι:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 + 3t \\ z = -2 - 5t \end{cases}$$

Η αναλυτική εξίσωση είναι:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{3} = \frac{z+2}{-5}$$



Η ευθεία που διέρχεται από το A και είναι εφαπτόμενη προς το διάνυσμα $\vec{a}^b = \vec{AB} = (-3, 0, 1)$

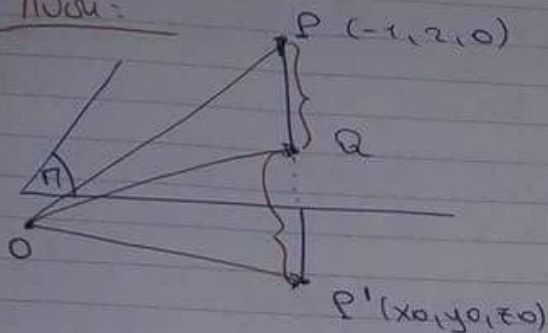
$$\bullet \vec{x} = (1, 3, 3) + t(-3, 0, 1)$$

$$\bullet \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 3 + 0t \\ z = 3 + 1t \end{cases}$$

$$\bullet \frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-3}{1}$$

1.6] Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου $P(-1, 2, 0)$ ως προς το επίπεδο $x+2y-z+1=0$.

Λύση:



As υποθέσουμε

As υπολογίσουμε πρώτα την προβολή Q του P στο (π) .

Το διάνυσμα $\vec{u}^P = (1, 2, -1)$ είναι κάθετο στο επίπεδο.

Η ευθεία:

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \vec{OP} + t\vec{u}^P = (-1, 2, 0) + t(1, 2, -1) = \\ &= (-1+t, 2+2t, -t) \text{ είναι κάθετο στο } (\pi) \end{aligned}$$

και διέρχεται από το P

Το Q είναι το σημείο τομής του (π) με την (ϵ) άρα:

$$\begin{aligned} (-1+t) + 2(2+2t) - t + 1 &= 0 \Rightarrow t + 4 + 4t + t = 0 \\ \Rightarrow 6t &= -4 \Rightarrow \boxed{t = -2/3} \end{aligned}$$

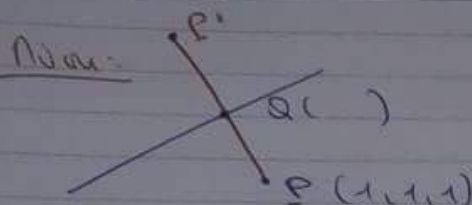
$$\text{Άρα: } Q(-5/3, 2/3, 2/3)$$

Εάν P' είναι το συμμετρικό του P , τότε:

$$\begin{aligned} \vec{OP} + \vec{OP}' &= 2\vec{OQ} \Rightarrow \vec{OP}' = 2\vec{OQ} - \vec{OP} = \left(-\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) - \\ &= (-1, 2, 0) \end{aligned}$$

1.2 Na βρεθεί το σιμμετρικό του σημείου P
 όπου P (1,1,1) ως προς την ευθεία (E) με εξίσωση:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-3}{1} = t \quad (E)$$



$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 8t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

1^ο βήμα: Βρίσκουμε προβολή του P στην
 (E). Η προβολή Q θα είναι τομή του επιπέδου
 που περιέχει το P και είναι κάθετο στην (E).
 Το επίπεδο αυτό είναι:

$$3(x-1) + 8(y-1) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 8y + z = 12 \quad (\pi)$$

Βρίσκουμε σημείο τομής (π) με (E) :

$$\begin{aligned} 3(1+3t) + 8(2+8t) + (3+t) &= 12 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 + 9t + 16 + 64t + 3 + t &= 12 \Rightarrow \\ \Rightarrow 74t + 22 &= 12 \Rightarrow 74t = -10 \Rightarrow t = -\frac{10}{74} = -\frac{5}{37} \end{aligned}$$

$$Q \left(1 - \frac{33}{37}, 2 + \frac{8}{37}, 3 - \frac{11}{37} \right)$$

2^ο βήμα: $\vec{OP'} = 2\vec{OQ} - \vec{OP}$

$$\frac{1}{2} \frac{2}{3}$$